

MÁSTER EN MATEMÁTICAS
CURSO 2022-23
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ONDÍCULAS, REDES NEURONALES Y TRATAMIENTO DE SEÑALES

Davide Barbieri

Descripción general

Se propone un curso que incorpora en el programa clásico del curso de ondículas una parte sobre redes neuronales. El objetivo es proporcionar una formación básica sobre temas actuales del análisis de datos, que permita acercarse a las técnicas más modernas, desde el punto de vista de las matemáticas.

El curso se estructura en tres módulos, aproximadamente de la misma cantidad de horas.

El primer módulo se centra en los conceptos más aplicados del análisis de Fourier: el principio de incertidumbre, el muestreo, y el análisis de Fourier local. Las aplicaciones propuestas serán estudios numéricos con Matlab de series temporales y de señales audio (musicales).

El segundo módulo se centra en el análisis multiescala con transformadas de ondículas, sus propiedades principales y su construcción. En particular se mostrará la capacidad de las ondículas de encontrar singularidades y de comprimir las componentes suaves de las señales, y se estudiará la construcción de bases ortonormales para problemas de aproximación. Las aplicaciones propuestas serán estudios numéricos con Matlab tanto con ondículas continuas como con ondículas discretas, de series temporales y de imágenes naturales.

Finalmente, el tercer módulo se centra en algunos de los resultados matemáticos más fundamentales para entender el funcionamiento de las redes neuronales. Las dos líneas directrices serán las propiedades de aproximación y aprendibilidad de esta familia de funciones, conocidas como *teoremas de aproximación universal*, y las principales técnicas de aprendizaje, incluyendo stochastic gradient descent y métodos adaptativos. Para tratar estos temas se considerarán también referencias de la última década. Las aplicaciones propuestas serán en Tensorflow, en la plataforma de Google Colab.

La evaluación comprende 3 entregas de hojas de ejercicios, una por cada módulo, y una presentación final de un proyecto de trabajo personal sobre un tema relacionado con el curso.

Este curso tiene afinidad con cursos de Análisis Real/Armónico y de Estadística/Procesos Estocásticos.

Plan del Curso

1. Introducción general

Cap I - Análisis de Fourier

2. La transformada de Fourier, las series de Fourier y el principio de incertidumbre.
3. Teorema de muestreo de Shannon y espacio de Paley-Wiener.
4. Señales finitas, transformada de Fourier discreta y FFT.
5. *Laboratorio 1*: series temporales, frecuencia de Nyquist, aliasing.
6. La transformada de Fourier con ventana, o Short Term Fourier Transform.
7. Discretización: marcos de Gabor. Existencia y teorema de densidad.
8. Un algoritmo constructivo para marcos de Gabor.
9. *Laboratorio 2*: análisis en tiempo-frecuencia de señales audio.

Referencias:

- G. Folland, Fourier analysis and its applications. Brooks/Cole, 1992.
- W. Rudin, Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill, 3rd ed. 1976.
- I. Daubechies. Ten lectures on wavelets. SIAM, 1992.
- K. Gröchenig. Foundations of time-frequency analysis. Springer, 2001.

Cap II - Ondículas

10. Ondículas continuas: admisibilidad de Calderón y detección de singularidades.
11. *Laboratorio 3*: las ondículas de Morlet y de sombrero Mexicano.
12. Las ondículas discretas no son sistemas de traslaciones. Ondículas de Haar y de Shannon.
13. Análisis en Multirresolución I: aproximación, detalle y la función de escala.
14. Análisis en Multirresolución II: el teorema de completitud y el filtro paso bajo de una MRA.
15. Análisis en Multirresolución III: el filtro de paso alto y las MRA ortonormales de Mallat.
16. Análisis en Multirresolución IV: ondículas de soporte compacto y el algoritmo de descomposición.
17. *Laboratorio 4*: análisis MRA de imágenes digitales.

Referencias:

- E. Hernández, G. Weiss. A first course on wavelets. CRC Press, 1996.
- S. Mallat. A wavelet tour of signal processing. Academic Press, 3rd ed. 2009.
- P. Van Fleet. Discrete wavelet transformations. Wiley, 2008.

Cap III - Redes Neuronales

18. Fundamentos del aprendizaje supervisado: conjuntos de datos, función de pérdida, aprendibilidad.
19. Arquitecturas básicas: la neurona, el MLP, las redes convolucionales.
20. Teorema(s) de aproximación universal con redes neuronales.
21. Algoritmos de aprendizaje I: el método del gradiente, teorema de convergencia.
22. Algoritmos de aprendizaje II: backpropagation y la regla de la cadena.
23. Algoritmos de aprendizaje III: stochastic gradient descent.
24. Algoritmos de aprendizaje IV: métodos adaptativos AdaGrad y ADAM.
25. *Laboratorio 5*: introducción a Tensorflow.
26. *Laboratorio 6*: construcción de un clasificador básico para MNIST.

Referencias:

- C. Higham, D. Higham. Deep Learning: an introduction for applied mathematicians. SIAM Review 2019.
- Y. Nesterov. Introductory lectures on convex optimization. Kluwer 2004.
- A. Pinkus. Approximation theory of the MLP model in neural networks. Acta Numerica 1999.
- D. Kingma, J. Ba. ADAM: A method for stochastic optimization. ICLR 2015.